Técnicas de Programación Avanzadas (TPA)

Universidad Europea
LAUREATE INTERNATIONAL UNIVERSITIES

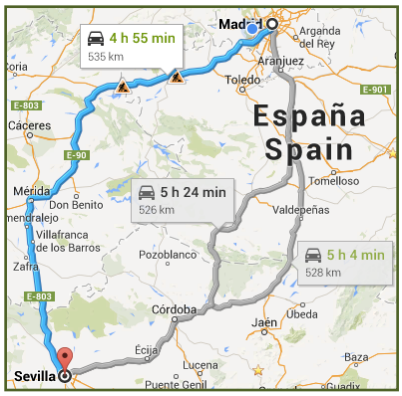
Tema 1. Eficiencia de los algoritmos

Tema 1. Eficiencia de los algoritmos

1. Criterios para medir la eficiencia de un algoritmo
2. Tiempo de ejecución
3. Orden de magnitud
4. Reglas para calcular la complejidad del código
5. Complejidad en código recursivo

Criterios para medir la eficiencia de un algoritmo

- Para un mismo problema se pueden diseñar distintos algoritmos (soluciones) que lo resuelvan correctamente.
- Debe poderse determinar qué algoritmo utilizar.
- **Ejemplo:** ¿Cuál es la mejor ruta?
  - La más corta.
  - La más rápida.
  - La que no tenga peajes.



Técnicas de Programación Avanzadas (TPA)

Criterios para medir la eficiencia de un algoritmo

- Para ello se compararán según un criterio determinado. Los más usuales:
  - Legibilidad y facilidad de comprensión, codificación y depuración.
  - Uso eficiente de los recursos: tiempo de ejecución y espacio de memoria.
  - (Otros: reutilización, documentación, portabilidad, etc.)
- Mediremos la eficiencia según el segundo de los criterios (los primeros se presuponen).

Universidad Europea

Criterios para medir la eficiencia de un algoritmo

- La **memoria** ya no es un recurso crítico → mediremos la eficiencia de un algoritmo basándonos casi siempre en su tiempo de ejecución.
- El tiempo de ejecución no dependerá de la **potencia** de la máquina donde se ejecuta. Habrá que estudiarlo en función del **algoritmo** utilizado.

Tema 1. Eficiencia de los algoritmos

1. *Criterios para medir la eficiencia de un algoritmo*
2. **Tiempo de ejecución**
3. **Orden de magnitud**
4. **Reglas para calcular la complejidad del código**
5. **Complejidad en código recursivo**

Tiempo de ejecución

- En general, el tiempo de ejecución de un programa depende de varios factores:
  1. Nº de veces que se ejecuta cada instrucción.
  2. Compilador utilizado (una instrucción de alto nivel se puede traducir a lenguaje máquina de diferentes formas).
  3. El ordenador utilizado (puede variar el tiempo de ejecución de cada instrucción máquina).

- Nos basaremos sólo en el primer factor. Los demás no se pueden presuponer.

Tiempo de ejecución

- Realizaremos una **estimación** a priori de la frecuencia de ejecución.

- En el tiempo de ejecución de un caso concreto también influye:
  - Nº de datos de entrada,
  - Estructura de la entrada,
  - Distribución de la entrada.
  - Calidad del código fuente y calidad del código máquina ➔ no se calcula el nº de instrucciones ejecutadas, sino el nº de veces que se ejecuta cada instrucción.

Tiempo de ejecución

- Dependiendo de la entrada del problema, pueden darse 3 casos:
  - Caso Peor: el tiempo de ejecución es máximo.
  - Caso Mejor: el tiempo de ejecución es mínimo.
  - Caso Medio: caso más probable. Tiempo de ejecución = media estadística de todos los casos posibles.
- Para probar la eficiencia de un algoritmo usaremos como medida el tiempo de ejecución en el peor caso: T(n).

Tiempo de ejecución

- **Ejemplo:**
  - ¿Cuántas veces se ejecuta cada instrucción si el tamaño N de la lista es 4? ¿Y si es 6?

```
boolean buscar (TElemento item, Lista L) {
   {Pre: N>0}
   {Post: Buscar = ∃i:1<=i<=N: L[i]=item}
1  boolean encontrado = false;
2  int cont = 0;
3  while ((!encontrado) && (cont < L.longitud())){
4     cont++;
5     encontrado = L[cont] == item;
   }
6  return encontrado;
}
```

Tiempo de ejecución

- En el peor de los casos:

Instrucción	Código	Ejecuciones
1	`boolean encontrado = false;`	1
2	`int cont = 0;`	1
3	`while ((!encontrado) && (cont < L.longitud()))`	n+1
4	`cont++;`	n
5	`encontrado = L[cont] == item;`	n
6	`return encontrado;`	1
	Total	**3n+4**

  - A medida que se incrementa el tamaño *n* de la lista, el valor de *T(n)* crece de manera proporcional a *n* ➔ *T(n)* tiene un orden de magnitud de *n*.

Tiempo de ejecución

- $T(n) \in O(f(n))$, si $\exists$ ctes c y n_0 tal que $T(n) \leq c*f(n)$, $\forall\ n \geq n_0$
- $T(n) \in \Omega(g(n))$, si $\exists$ ctes c y n_0 tal que $T(n) \geq c*g(n)$, $\forall\ n \geq n_0$
- $T(n) \in \Theta(h(n))$, si y sólo $T(n) \in O(h(n))$ y $T(n) \in \Omega(h(n))$

- Si $T(n) \in O(f(n))$ ➔ T(n) nunca crece más rápido que f(n).
- Si $T(n) \in \Omega(g(n))$ ➔ T(n) crece, al menos, al mismo ritmo que g(n)
- Si $T(n) \in \Theta(h(n))$ ➔ representa exactamente la tasa de crecimiento de T(n)

Tema 1. Eficiencia de los algoritmos

1. *Criterios para medir la eficiencia de un algoritmo*
2. *Tiempo de ejecución*
3. **Orden de magnitud**
4. **Reglas para calcular la complejidad del código**
5. **Complejidad en código recursivo**

Tiempo de ejecución

- Reglas para el cálculo de complejidad de un algoritmo

1. Si $T_1(n) \in O(f(n))$ y $T_2(n) \in O(g(n))$, entonces:

   a) $T_1(n) + T_2(n) \in Max (O(f(n)), O(g(n)))$
   b) $T_1(n) * T_2(n) \in O (f(n) * g(n))$

2. Si T(x) es un polinomio de grado g → $T(x) \in O(x^g)$

Tiempo de ejecución

- Definiremos una relación entre los distintos órdenes de magnitud de las funciones f(n) (siempre válida a partir de un n_0 determinado):

  $O(1) < O(\log n) < O(n) < O(n \cdot \log n) < O(n^2) < O(n^3) < ... < O(2^n) < O(n!) < O(n^n)$

  $\forall\ n >= n_0$

- Esta notación (O) indica un límite superior de f(n).

  Ejemplo: si f(n) es $O(n^2)$ → también es $O(n^3)$, $O(2^n)$...

- Al hallar la complejidad se desprecian las ctes de proporcionalidad.
  - Inconveniente: no muy bueno para valores pequeños de la entrada.

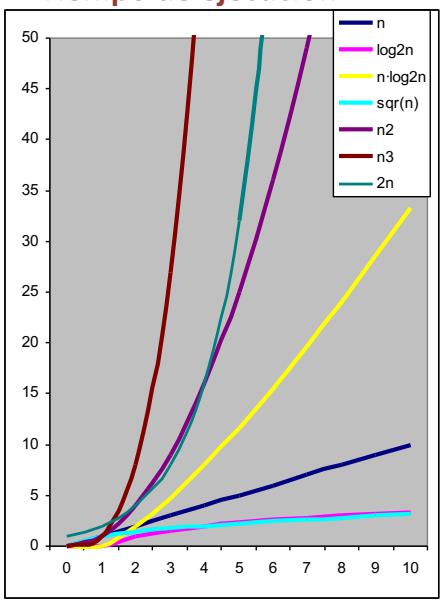
  Ejemplo:

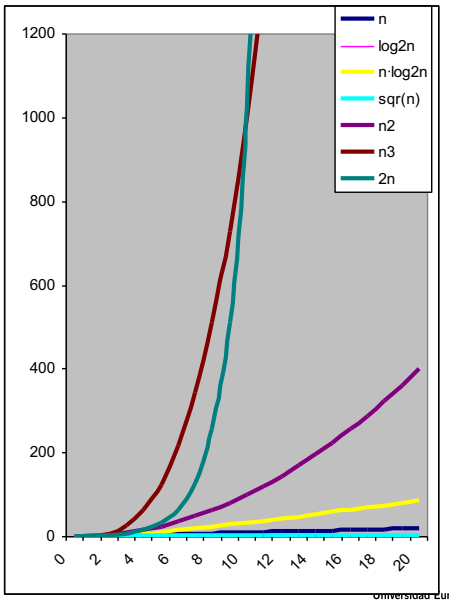
  $T_1(n) = 5n^3 = O(n^3)$

  $T_2(n) = 100n^2 = O(n^2)$

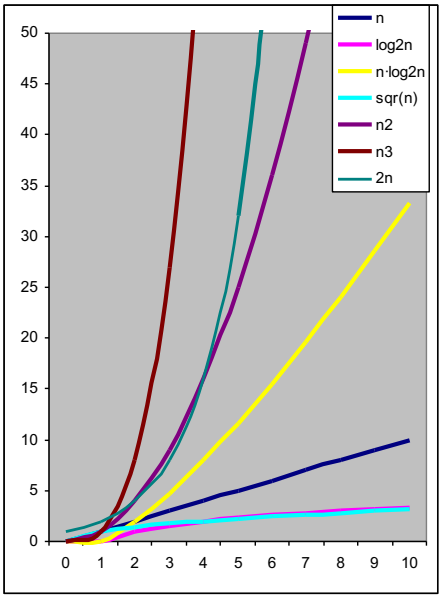
  $5n^3 / 100n^2 = n/20$ → para n<20, T_1 es mejor.

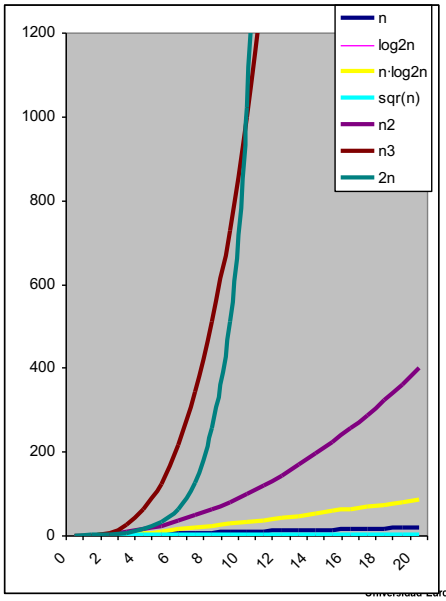
Tiempo de ejecución





Tiempo de ejecución





Tema 1. Eficiencia de los algoritmos

1. *Criterios para medir la eficiencia de un algoritmo*
2. *Tiempo de ejecución*
3. *Orden de magnitud*
4. **Reglas para calcular la complejidad del código**
5. **Complejidad en código recursivo**

Reglas para calcular la complejidad del código

- ¿Cómo se traduce todo esto a la hora de calcular la complejidad de nuestro código?
  - Aplicaremos diferentes herramientas
  - Dependerán de los elementos o estrategias de programación utilizadas

- Sentencias simples
  - Cada instrucción máquina se ejecuta en un tiempo constante K_i.
  - Escogemos como unidad el mayor tiempo K_i.
  - Cada sentencia se considera de O(1).
  - Válido para manipulaciones (asignaciones, comparaciones, etc.) sobre datos simples.
- Composición secuencial:
  - Para una secuencia de sentencias → el máximo de todas ellas.

Reglas para calcular la complejidad del código

- Selección Condicional (If then else, Case):
  - De entre todos los posibles caminos → el máximo en complejidad.

- Repeticiones:
  - $\sum$ (complej. cuerpo bucle + complej. condición terminación)

- Llamadas a otros módulos (procedimientos o funciones):
  - Como si fuesen otras partes del programa

Reglas para calcular la complejidad del código

- **Ejemplos:**
  - `x = x + 1` → O(1)
  -
```
for (i=1;i<=N;i++) {
    X = X + 1;
}
```
→ O(n)
  -
```
for (i=1;i<=N;i++) {
    for (j=1;j<=N;j++) {
     x = x +1;
    }
}
```
→ $O(n^2)$

Reglas para calcular la complejidad del código

- **Ejemplo:**

```
void burbuja (TElemento A[]) {
  for (int i = 1; i <= A.length; i++) {
        for (j = A.length; j > i; j--) {
              if (A[j-1] > A[j]) {
                    TElemento temp = A[j-1];
                    A[j-1] = A[j];
                    A[j] = temp;
              }
        }
  }
}
```

Reglas para calcular la complejidad del código

- **Fórmulas habituales:**

$$\sum_{i=1}^{n} 1 = n \qquad \sum_{i=1}^{n} i^{-1} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = \log(n)$$

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Reglas para calcular la complejidad del código

- Recursividad
  1. Reducción por SUSTRACCIÓN
  2. Reducción por DIVISIÓN
- **Reducción por sustracción**

Complejidad del caso base

$$T(n) = \begin{cases} c_0 n^{k_0} & \text{si } 0 <= n < b \\ \mathbf{a}\cdot T(n - \mathbf{b}) + c_1 n^k & \text{si } n >= b \end{cases}$$

Complejidad del caso general

Parte recursiva — Parte NO recursiva

a: número de llamadas recursivas idénticas en cada invocación del programa

n-b: tamaño de los subproblemas generados

$\mathbf{n^k}$: coste de las instrucciones que no son llamadas recursivas

$T(n) \in \Theta(n^{k+1})$ si a=1

$T(n) \in \Theta(a^{n \text{ div } b})$ si a>1

Reglas para calcular la complejidad del código

- Recursividad
  1. Reducción por SUSTRACCIÓN
  2. Reducción por DIVISIÓN

- **Reducción por división**

$$T(n) = \begin{cases} c_0 n^{k_0} & \text{si } 0 <= n < b \\ \mathbf{a} \cdot T(n / \mathbf{b}) + c_1 n^{\mathbf{k}} & \text{si } n >= b \end{cases}$$

$T(n) \in \Theta(n^k)$ si $a<b^k$
$T(n) \in \Theta(n^k \log_b n)$ si $a= b^k$
$T(n) \in \Theta(n^{\log_b a})$ si $a> b^k$

a: número de llamadas recursivas idénticas en cada invocación del programa

n-b: tamaño de los subproblemas generados

n^k: coste de las instrucciones que no son llamadas recursivas